

基於聲音特性之鐵琴片形狀設計

Shape Design of Metalophone Base on Percussion Sound Characteristics

王栢村¹、謝明憲²、趙天麒²

¹屏東科技大學機械工程系教授

²屏東科技大學機械工程系研究生

摘要

本文目的主要在探討設計出具和弦聲音特性之鐵琴片形狀結構，為了解鐵琴片聲音輻射結構特性，首先回顧鐵琴片聲音與振動模態探討，可發現聲音與振動模態有直接的關聯性，由了解鐵琴片的振動模態特性後，進而發展出基於鐵琴片形狀設計的分析流程，本文引用貝茲曲線的特性，利用幾何的節點控制產生平滑曲線，藉於建立鐵琴片的有限元素模型，進行模態分析，求得自然頻率與模態振型，由模態振型可判斷其鐵琴片的發聲效果，再做反復的幾何設計變更流程之最佳化分析，可得到符合和弦音階的自然頻率比例特性，結果顯示，透過分析可求得適當的結構模態頻率比例符合和弦音階特性，可初步達到具和弦音階之鐵琴片設計，未來可以引用此方法，再探討不同和弦音階之鐵琴片設計。

關鍵字：鐵琴、形狀設計、和弦、聲音輻射、振動模態

Abstract

This work aims to design the geometry of metalophone that can produce harmonic chord sound. First, a literature review is conducted to understand the structural sound radiation of a metalophone that is highly correlated to the structural vibration modes. Next, a design analysis procedure is developed to perform shape design of the metalophone base on target frequency combinations. This work adopts the Bezier spline technique to generate the curve boundary of the metalophone by optimizing the control points, and the finite element model of the metalophone can then be constructed accordingly. The modal analysis on the metalophone is carried out to determine its natural frequencies and corresponding mode shapes. Particularly, we can evaluate the sound radiation characteristics from the metalophone mode shapes. By repeating the geometry redesign and modal analysis of the metalophone, its optimum shape can be obtained to have the desired modal frequency ratios that can meet the target harmonic frequencies. Results show that the designed shape of the metalophone can produce the harmonic chord sound. The developed methodology can be applied to design different harmonic chords of metalophones.

Keywords: metalophone, shape design, harmonic chord, sound radiation, vibration mode

壹、前言

打擊樂可以說是最古老，最原始的音樂，幾乎可見於任何民族的傳統音樂中，鐵琴在中國眾多樂器裡，以聲音清脆、餘音短促、鮮明及高浸透等特性，在樂器中獨樹一格，在 18 世紀末首次使用於管弦樂中，主要用來製造特殊音效，加強另一種樂器演奏旋律，或用來突顯樂曲中某個特殊的段落。

在鐵琴樂器中，一塊音板代表著一個音階，鐵琴由眾多不同音階之音板所組合而成，並利用敲擊錘敲擊音板來發聲，在演奏時，若欲擊出和弦音，則需以多根敲擊錘同時敲擊不同音階之音板來達成和弦音，目前市面上之鐵琴皆沒有和弦音之板設計。

王等人[1]探討鐵琴片之振動與聲音的關聯性，量測鐵琴片敲後之聲音頻譜響應，得知鐵琴片之基本頻率，並以基本頻率與振動模態得到其對應關係。王等人[2]以加速度計與麥克風為感測器，對鐵琴片進行實驗模態分析之比較，結果顯示使用加速度計與麥克風所量得之自然頻率均相當吻合，證實麥克風當感測元件是可行的。Bretos et al. [3]以有限元素分析木琴之木條的振動自然模態，探討木條均勻或凹刻截面對其自然頻率及模態振型之影響，得知木條之非均勻材料特性，其楊氏係數對側向振動模態影響最鉅。Doutaut et al. [4]以自由樑理論分析木琴受敲擊的時間域及頻率響應預測，其理論分析結果與實驗量測結果有良好的吻合性。王等人[5]藉由有限元素分析軟體與實驗模態分析來探討銅鑼之振動與聲音特性，實驗量測結果與有限元素分析軟體之結果均相當吻合，因此證實有限元素分析軟體進行分析的方法是可行的。王等人[6]以吉他弦之振動特性與聲音頻譜做一關聯性的探討，並確認吉他弦音與弦振動之彼此的關聯性。王等人[7-8]以實際吉他結構模態振型與有限元素軟體之振型互相對應，且實驗與合成實驗之頻率響應函數曲線也相當吻合。王等人[9]對高爾夫球木桿球頭，進行理論有限元素分析與實驗模態分析，以衝擊槌敲擊球頭，並量測球頭表面之加速度，及聲音信號以探討球頭振動模態與聲音輻射之關聯性，證實球頭聲音頻譜與振動自然頻率有密切之關係。王等人[10]以有限元素軟體進行最佳化設計問題一系列探討，並以貝茲曲線法對平板進行形狀最佳化設計，證實利用貝茲曲線法能應用於有限元素軟體之形狀最佳化設計問題。

本文採用有限元素分析之貝茲曲線法形狀最佳化設計來進行和弦鐵琴片設計，主要分析目標如下：

1. 設計出具 C 和弦鐵琴片：以貝茲曲線法及形狀最佳化設計來設計出具有 C 和弦之鐵琴片。
2. 建立一套形狀設計之方法流程：利用有限元素之最佳化分析並配合貝茲曲線法，建構出所需結構之目標形狀。

貳、鐵琴片聲音模態與振動探討

圖 1 為一般常見的鐵琴，以鐵琴的 C 音階鐵琴片來分析回顧王等人[1]探討鐵琴片之振動與聲音的關聯性，圖 2 為鐵琴片實驗分割圖，長、寬、厚分別為 122mm、30mm、3mm，將其畫分為 9 個敲擊點，藉以不同敲擊點位置聲音的比較。



圖 1 鐵琴實體圖[1]

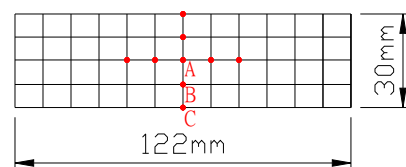


圖 2 鐵琴片實驗分割圖[1]

當敲擊鐵琴片時，重複敲到同一位置的可能性不高，因此在鐵琴片中央規劃了 9 個敲擊點進行敲擊，如圖 2 所示，藉以探討不同敲擊位置對聲音的影響。圖 3 為 A、B、C 三點之實

驗結果，由圖 3(a)中可明確看出中心點的聲音頻譜圖中只有 4 個共振峰值，這是因為敲擊點為鐵琴片的中間點，所以偶數模態（第 2、第 4 和第 6 模態）並沒有被激出來；而圖 3(b)與圖 3(c)中，由於敲擊點是中心點偏下一些的敲擊，因此有激振出較多的模態。因此，敲擊鐵琴片的中間點，可明確激出第一個振動模態之聲音頻率。

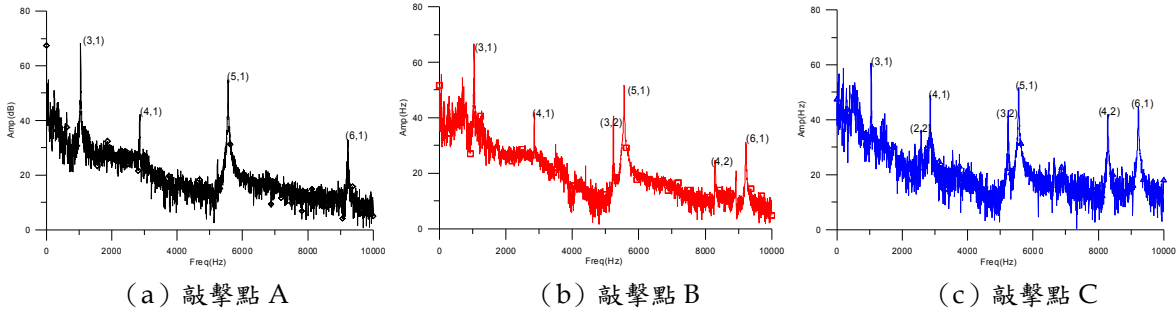


圖 3 鐵琴片不同位置之聲音頻譜圖[1]

參、基於鐵琴片聲音特性之形狀設計

欲設計出具和弦之鐵琴片，設計時採用 ANSYS 有限元素分析軟體之最佳化設計方法及利用貝茲曲線(Bezier curve)法建構出和弦鐵琴片之模型，再利用最佳化之結果參數，進行模態分析，討論鐵琴片自然頻率是否達到 C 和弦所需之頻率值。

3-1 貝茲曲線法

假設給 $n+1$ 個控制點 $p_i=(x_i, y_i) \quad i=0,1,\dots,n$ ，會產生 m 個 Bezier 點 $P_j=(x_j, y_j) \quad j=1,2,\dots,m$ 如圖 4，將上述控制點及 Bezier 點以向量或參數型式表示如下：

$$\text{控制點: } p_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

$$\text{求解點: } P_j(u_j) = \begin{pmatrix} \bar{x}_j(u_j) \\ \bar{y}_j(u_j) \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (2)$$

其中

$$u_j = \frac{j}{m} \quad (3)$$

利用貝茲曲線(Bezier curve)法來控制設計出之鐵琴片之外形，以 $n+1$ 點的 n 階 Bezier 多項式可得：

$$P_j(u_j) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-u_j)^{n-i} u_j^i p_i \quad (4)$$

其中

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (5)$$

當給予欲設計之控制點座標，貝茲曲線法可利用給予之控制點座標來建構出曲線，當控制點 $n=2$ 時，(4)式可以純量的方式表示如下：

$$\bar{x}_j(u_j) = (1-u_j)^2 x_0 + 2(1-u_j)u_j x_1 + u_j^2 x_2 \quad (6)$$

$$\bar{y}_j(u_j) = (1-u_j)^2 y_0 + 2(1-u_j)u_j y_1 + u_j^2 y_2 \quad (7)$$

將欲設計之控制點數目，以此類推，代入(1)式，即可獲得欲想得到之控制點數目之純量貝茲曲線方程式，再將其設計之控制座標代入此方程式，即可得所需之曲線。

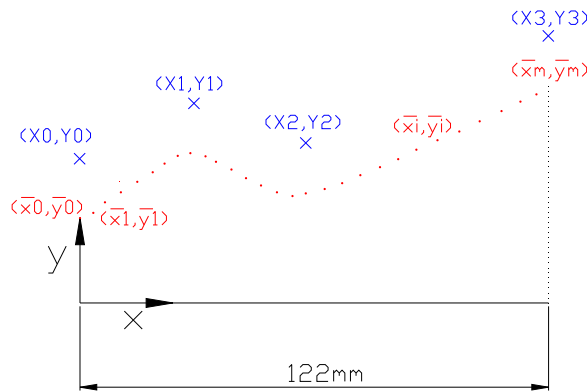


圖 4 貝茲曲線規劃點示意圖

3-2 有限元素分析(FEA)

為建構出上下對稱且具 C 和弦鐵琴片之有限元素模型，採取結構對稱性進行模型建構，設定鐵琴片長度為 122mm，寬度則是利用最佳化分析時進行置定，表 1 為 C 和弦鐵琴片材料性質。

表 1 鐵琴片材料性質

楊氏係數(N/m ²)	密度(kg/m ³)	浦松比
0.1847*10 ¹²	7468	0.27

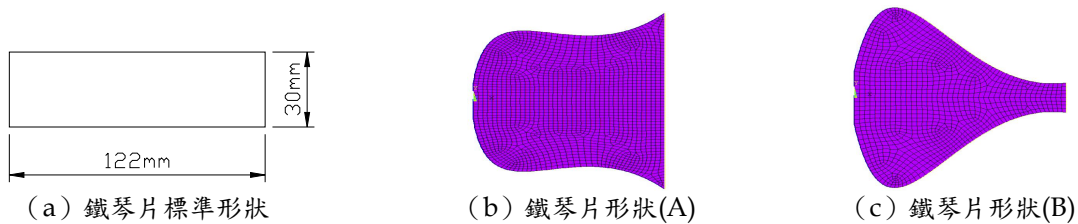


圖 5 鐵琴片有限元素模型

本文採用 ANSYS 有限元素軟體進行最佳化分析，圖 5 為鐵琴片有限元素模型示意圖，假設鐵琴片材料為等向性且為均質性，並符合虎克定律之假設，元素形式採用線性四邊形殼元素(Shell 63)來架構鐵琴片，元素分割採以每邊長 0.003m 為一單位進行分割，在設定位移限制及負荷條件方面，因鐵琴片採自由邊界，位移限制不需設定，在模態分析時亦不需設定負荷條件。

3-3 形狀最佳化設計

針對 C 和弦鐵琴片之形狀最佳化問題，利用 ANSYS 有限元素軟體來進行最佳化設計，表 2 為鋼琴鍵盤對應頻率表，分別對鐵琴片 C 和弦定義出如圖 6。

目標函數：

$$F(X) = \left(\frac{f_1 - f_C}{f_C}\right)^2 + \left(\frac{f_2 - f_E}{f_E}\right)^2 + \left(\frac{f_3 - f_G}{f_G}\right)^2 \quad (8)$$

設計變數：

$$X = (y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, y_3) \quad (9)$$

$$x_0 = 0, \quad x_3 = 122\text{mm}$$

限制條件：

$$x_3 > x_2 > x_1 > x_0 \quad (10)$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3 > 0 \quad (11)$$

表 2 鋼琴鍵盤對應頻率表(Hz)

鍵盤	C6	D6	E6	F6	G6	A6	B6
頻率	1046	1174	1318	1396	1567	1760	1975

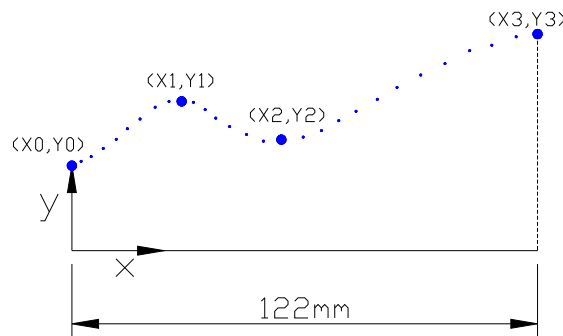


圖 6 貝茲曲線控制點示意圖

肆、結果與討論

利用 ANSYS 有限元素軟體之最佳化設計分析，設計出具 C 和弦頻率特性之鐵琴片形狀，就鐵琴片(A)(B)二種形狀之自然頻率與模態振型，就其結果做以下討論。


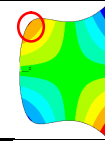

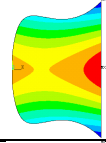
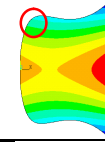
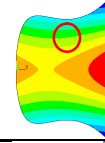
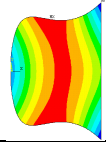
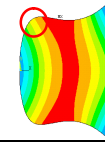
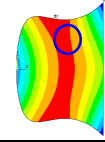
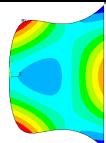
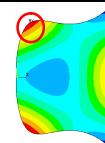
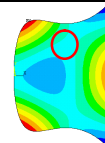
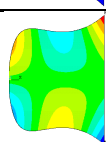
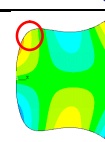
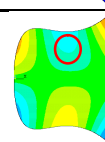
- (1) 表 3 鐵琴片形狀(A)在第 9、10、11 之自然頻率與目標頻率比對誤差皆在 5% 以內；表 4 鐵琴片形狀(B)在第 7、8、9 之自然頻率與目標頻率比對，第 9 模態之自然頻率與目標頻率 1567(Hz)完全吻合，但第 7 模態之自然頻率與目標頻率誤差較大為 6.8%。由上述歸納出鐵琴片形狀(A)(B)之優缺點：

優點：鐵琴片形狀(A)之自然頻率與目標頻率誤差小，在工程誤差 5% 以內；鐵琴片形狀(B)之自然頻率與目標頻率對應出現在 1~6 剛體模態後的第 7、8、9 模態。

缺點：鐵琴片形狀(A)之自然頻率與目標頻率對應出現在第 9、10、11 模態，而第 7、8 模態之自然頻率與目標頻率誤差太大，鐵琴片敲擊時，亦會干涉 C 和弦音的激發；鐵琴片形狀(B)之自然頻率與目標頻率對應出現在第 7、8、9 模態，但其自然頻率與目標頻率的誤差較大。

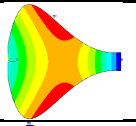
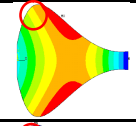
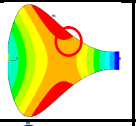
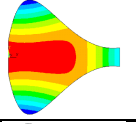
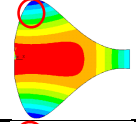
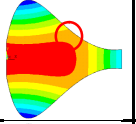
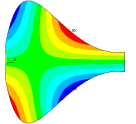
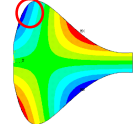
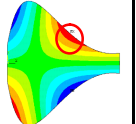
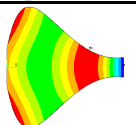
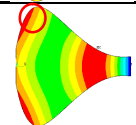
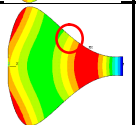
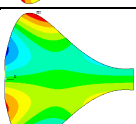
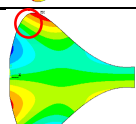
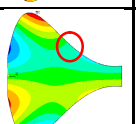
- (2) 表 3 鐵琴片形狀(A)敲擊位置(1)可對應圖 7(a)之頻率響應函數，當敲擊位置(1)時，鐵琴片形狀(A)第 7~11 模態皆有聲音激發，故不是 C 和弦鐵琴片所需之 C、E、G 聲音頻率；表 4 鐵琴片形狀(B)敲擊位置(1)可對應圖 8(a)之頻率響應函數，當敲擊位置(1)時，第 7 模態剛好在振型節線上，所以沒有聲音激發，其他第 8~11 模態都有聲音激發，故不是 C 和弦鐵琴片所需之 C、E、G 聲音頻率。
- (3) 表 3 鐵琴片形狀(A)敲擊位置(2)可對應圖 7(b)之頻率響應函數，當敲擊位置(2)時，鐵琴片形狀(A)第 7、8 模態剛好在振型節線上故無聲音激發，而第 9、10、11 模態皆有聲音激發，相當吻合 C 和弦鐵琴片所需之 C、E、G 聲音頻率；表 4 鐵琴片形狀(B)敲擊位置(2)可對應圖 8(b)之頻率響應函數，當敲擊位置(2)時，第 8 模態剛好在振型節線上無聲音激發，其他模態皆有聲音激發，亦不符合 C 和弦鐵琴片所需之 C、E、G 聲音頻率。

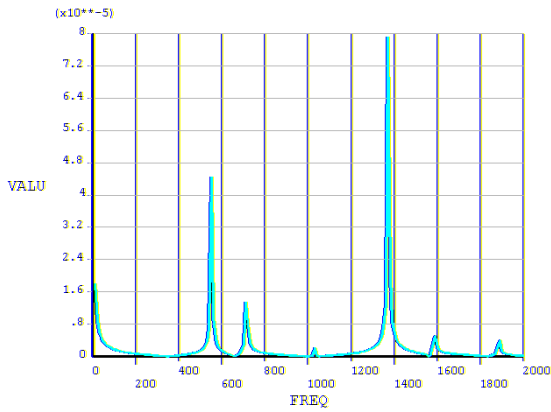
表 3 鐵琴片形狀(A)自然頻率與模態振型對照表

模態	目標 頻率 (Hz)	自然 頻率 (Hz)	誤差 (%)	物理 意義	模態振型	敲擊位置 (1)	聲音	敲擊位置 (2)	聲音
7	---	548.8	---	(2,2)			O		X
8	---	704.5	---	(1,3)			O		X
9	1046	1027	1.82	(3,1)			O		O
10	1318	1369	3.9	(2,3)			O		O
11	1567	1578	0.7	(3,2)			O		O

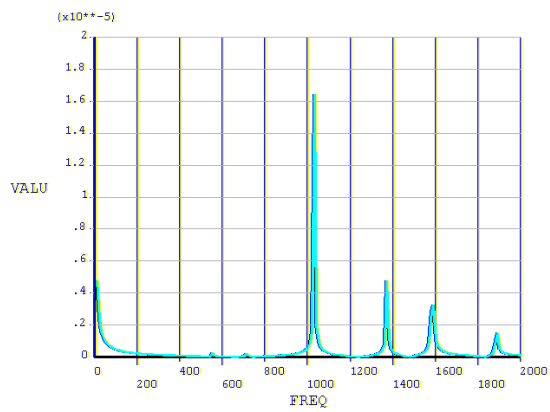
註：O 為有聲音激發 X 為無聲音激發

表 4 鐵琴片形狀(B)自然頻率與模態振型對照表

模態	目標 頻率 (Hz)	自然 頻率 (Hz)	誤差 (%)	物理 意義	模態振型	敲擊位置 (1)	聲音	敲擊位置 (2)	聲音
7	1046	1117	6.8	(3,1)			X		O
8	1318	1355	2.81	(1,3)			O		X
9	1567	1567	0	(2,2)			O		O
10	---	3039	---	(4,1)			O		O
11	---	3049	---	(1,4)			O		O

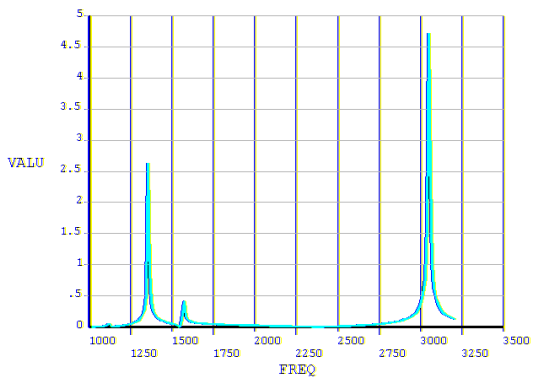


(a) 敲擊位置(1)

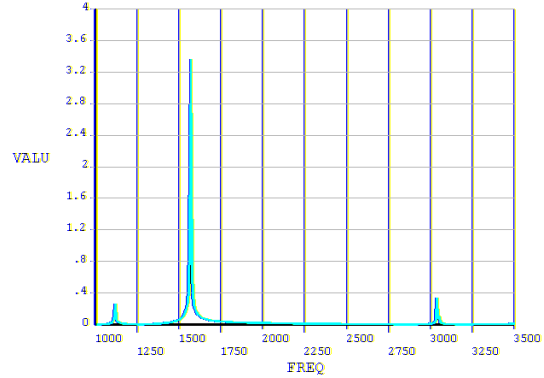


(b) 敲擊位置(2)

圖 7 鐵琴片形狀(A)不同敲擊位置 FEA 之頻率響應函數



(a) 敲擊位置(1)



(b) 敲擊位置(2)

圖 8 鐵琴片形狀(B)不同敲擊位置 FEA 之頻率響應函數

伍、結論

本文首先回顧鐵琴片聲音與振動模態的探討，進而了解聲音與振動及不同敲擊點與聲音間的關聯性。進而建立貝茲曲線法之鐵琴片形狀最佳化設計方法，反復的幾何設計變更流程之最佳化分析，結論如下：

- (1) 藉由貝茲曲線方程式，以控制節點座標的方式，來建構出鐵琴片外形曲線，並配合 ANSYS 軟體之最佳化設計方法，建立一套 C 和弦鐵琴片形狀最佳化設計方法流程。
 - (2) 運用貝茲曲線法之鐵琴片形狀最佳化設計方法，本文探討 2 種不同形狀之鐵琴片，分別做振動模態與簡諧分析的比對，以初步判定自然頻率及頻率響應函數的對應，以了解敲擊位置是否有聲音激發之可能性。
 - (3) 本文探討 2 種不同形狀之鐵琴片，可了解鐵琴片(A)(B)分別顯示出設計後不同優缺點的訊息，鐵琴片(A)的第 9、10、11 模態之自然頻率與目標頻率接近，但卻非為最佳目標頻率所對應之第 7、8、9 模態；而鐵琴片(B)分析出來的自然頻率為目標頻率所對應第 7、8、9 模態，但其自然頻率與目標頻率的誤差較大仍需再修正調整。
 - (4) 鐵琴片敲擊後位置的探討，可歸納出鐵琴片形狀(A)敲擊位置(2)是最佳的敲擊點，其自然頻率與模態振型的對應及聲音的激發，皆可符合鐵琴片 C 和弦音的需求。
- 本文對於鐵琴振動與聲音的研究方法，可應用於不同和弦琴片上之設計驗證，或其他不同種類的敲擊樂器，建立對應之有限元素分析模型，將有助於樂器之和弦音設計的運用開發。

陸、參考文獻

1. 王栢村，林怡馨，2007，「鐵琴片振動特性與聲音關聯性之探討」，2007 中華民國音響學會年會暨第二十屆論文發表會，台北，論文編號：C5。
2. 王栢村，林怡馨，2007，「以加速度計與麥克風為感測器之鐵琴片實驗模態分析比較」，中華民國力學學會第三十一屆全國力學會議，高雄，論文編號：H31。
3. Bretos J., Santamaria C., and Moral, J. A., 1999, "Finite Element Analysis and Experimental Measurement of Natural Eigenmodes and Random Responses of Wooden Bars Used in Musical Instruments," *Applied Acoustics*, Vol. 56 pp. 141-156.
4. Doutaut V., Matignon, D., and Chaigne, A., 1998, "Numerical Simulations of Xylophones. II. Time-Domain Modeling of the Resonator and of the Radiated Sound Pressure," *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 104, No.3, pp. 1633-1647.
5. 王栢村，李雨軒，張志偉，2002，「銅鑼振動與聲音特性之探討」，中華民國振動與噪音工程學會第十屆學術研討會論文集，台北，第 245-252 頁。
6. 王栢村，蘇集銘，2006，「吉他弦之振動與聲音特性探討」，中華民國音響學會第十九屆學術研討會論文集，台南，論文編號：A7。
7. 王栢村，黃國棟，2004，「吉他之振動特性與模態分析」，中華民國音響學會第十七屆學術研討會論文集，高雄，第 197-204 頁。
8. 王栢村，胡惠文，蘇敬翔，2003，「吉他共鳴箱之振動特性分析」，ANSYS 2003 台灣區用戶大會暨論文發表會，雲林，第 71-84 頁。
9. 王栢村，林昆正，徐川洋，2003，「高爾夫球頭振動與聲音關聯性之探討」，中華民國音響學會第十六屆學術研討會論文集，台北，第 212-219 頁。
10. 王栢村，曾中慶，鄭佳旻，1996，「應用 ANSYS 有限元素軟體於最佳化設計問題」，屏東科技大學機械工程系大學部論文，屏東。